

Lineare Algebra II

Blatt 4

1 | Nochmalform

Bestimmen Sie die Hessesnormalformen der folgenden affinen Hyperebenen.

$$(a) L := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^2$$

$$(b) P := \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

$$(c) Q := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2+i \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{C} \right\} \subset \mathbb{C}^3$$

2 | Rotati Club

Welche der folgenden reellen Matrizen liegen in $O(3)$? Welche in $SO(3)$?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -4 & 3 & -13 \\ 6 & -6 & 13 \end{pmatrix} \quad B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Welche der folgenden komplexen Matrizen liegen in $U(3)$? Welche in $SU(3)$?

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -i & -1+i \\ i & 1 & 1+i \\ 1+i & -1+i & 0 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}i & \frac{1}{\sqrt{2}}i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3 | Auf Achse

Seien f, g Isometrien von \mathbb{R}^3 mit $fg = gf$ und $\det(f) = \det(g) = 1$. Zeigen Sie, dass entweder f und g Drehungen um dieselbe Achse sind, oder dass eine ON-Basis existiert, bezüglich derer sowohl f als auch g Diagonalgestalt haben.

Unter einer Rotation verstehen wir in dieser Aufgabe eine Isometrie von \mathbb{R}^3 , die bezüglich einer geeigneten ON-Basis gegeben ist durch eine Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & -b & a \end{pmatrix}$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$, $a^2 + b^2 = 1$. Unter einer Drehachse verstehen wir dann eine Ursprungsgerade, die punktweise von dieser Rotation fixiert wird. Sie können sich leicht überlegen, dass diese Begriffe ihrer anschaulichen Bedeutung entsprechen, müssen dies aber nicht als Teil Ihrer Lösung nachweisen. Für eine nicht-triviale Rotation gibt es genau eine Drehachse. Diese Drehachse ist der Eigenraum der Rotation zum Eigenwert 1.

4 | Spurlos

Sei $V \subset \text{Mat}_{\mathbb{C}}(2 \times 2)$ der \mathbb{R} -lineare Unterraum aller Matrizen B mit $\bar{B}^T = -B$ und $\text{tr}(B) = 0$.

(a) Berechnen Sie $\dim_{\mathbb{R}}(V)$ und zeigen Sie, dass das Tripel (A, B, C) mit

$$A := \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, B := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, C := \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

eine Basis von V als \mathbb{R} -Vektorraum ist.

(b) Zeigen Sie, dass

$$\langle M, N \rangle := -\frac{1}{2} \text{tr}(M \cdot N)$$

ein Skalarprodukt auf V definiert und dass die Basis aus Aufgabenteil (a) eine ON-Basis ist.